ACTES DE LA VI TROBADA D'HISTÒRIA DE LA CIÈNCIA I DE LA TÈCNICA
(BARCELONA, SCHCT, 2002), 121-132

LES MATEMÀTIQUES I LA NAVEGACIÓ: UNA ESTRETA COL·LABORACIÓ

Francesc X. Barca Salom
Centre de Recerca per a la Història de la Tècnica. Universitat Politècnica de Catalunya

Paraules clau: *matemàtiques*, *navegació*, *cartografia*, *Escola de Nàutica de Barcelona*, *Mercator*.

Mathematics and navigation: a close collaboration

Summary: *In the history of mathematics there have been time during which a close relationship existed between mathematics and nautical sciences. One of the problems involving this sciences was the attempt to resolve the situation at sea. To solve this problem, the correct representation of the curved surface of the sea on the plane was necessary. This entails the knowledge of drawing maps and the calculation of two coordinates: the latitude and the longitude.*

This paper deals with the relationship between mathematics and two nautical problems: the Mercator projection and the measure of the longitude at sea.

The former gives rise to a more general mathematical problem which consist in the representation of a curved surface over another whilst conserving the angles.

Despite being an easy problem conceptually, the latter took a long time to be resolved. This problem attracted the attention of the most important mathematicians of the time. In the XVIII century the method of the lunar distances was the one that was most widely used. We present the example of the Nautical School of Barcelona where the teachers had a good background in mathematics as consequently used the trigonometric procedure.

The relationship between mathematics and nautical sciences was after the XV century as intensive as the relation between pure and applied mathematics.

Key words: *mathematics, navigation, cartography, nautical school of Barcelona, Mercator.*

Els que impartim la docència de les matemàtiques, molt sovint i de manera recurrent ens trobem amb la dificultat d'haver de respondre a la pregunta dels nostres alumnes: i això, per a què serveix? I de vegades no sabem com convèncer-los de la importància de determinat concepte o de l'aplicabilitat de determinat procediment. La història de la ciència i de la tècnica, però, pot ser un recurs molt útil per fer front a aquesta situació, ja que pot proporcionar-nos molts exemples d'aplicació de la matemàtica per a resoldre un problema de tipus pràctic, tant científic com tecnològic. És més, en alguns exemples, la dependència entre la necessitat concreta i les matemàtiques ha estat tan important que fins i tot es pot afirmar que ha motivat que aquesta ciència avancés en una determinada direcció.

Per il·lustrar aquestes afirmacions ens serviran dos exemples, ambdós trets de la nàutica: la projecció Mercator i la mesura de la longitud en el mar. Tots dos casos no són independents, sinó que estan estretament relacionats amb un problema decisiu en la navegació, que consisteix en saber a cada moment en quin punt es troba situat el vaixell. És el conegut *problema del punt*, la resolució del qual depèn de saber situar sobre una carta nàutica el lloc on està el vaixell mitjançant dues mesures: la latitud, o distància mesurada en graus sobre el meridià des del punt on es troba la nau fins a l'equador, i la longitud, o distància mesurada en graus sobre un paral·lel des del vaixell fins al meridià de referència.

Com veiem, el problema del punt quedaria resolt en saber fer dues coses: primer, representar correctament sobre el paper la superfície del mar, és a dir, saber fer cartes nàutiques; i segon, disposar de mètodes, instruments i coneixements teòrics i/o pràctics per calcular les dues coordenades: la latitud i la longitud.

Però el problema no és tan senzill. Per poc que s'hagi navegat, quan el vaixell està envoltat d'aigua un dia rere l'altre, les dificultats de saber on està situat es fan francament evidents. No obstant això, la nàutica, des del seus inicis, ha anat desenvolupant diverses tècniques, basades més en la pràctica que en la ciència, per donar solució a aquest problema.

La navegació als inicis del Renaixement

Les històries de la navegació coincideixen a afirmar que a finals del segle XV es va produir un canvi qualitatiu en la necessitat de noves tècniques per a situar-se en el mar. Aquest canvi va coincidir amb l'època dels grans viatges dels navegants portuguesos cap a l'extrem d'Àfrica i de Cristòfol Colom cap a l'altre extrem de l'Atlàntic (Marguet, 1931, p. 13).

Abans del Renaixement, les dificultats de navegar pel Mediterrani estaven suficientment resoltes amb l'ús de portolans i amb els mètodes de l'estima.

Les cartes portolanes, de les quals tenim exemples de molta qualitat a casa nostra,[1] estaven fetes de pergamí, i representaven la mar Mediterrània, la mar Morta o la costa Atlàntica fins a Irlanda, com si la Terra fos una superfície plana. Tenien en compte que el nord magnètic estava desviat del nord vertader uns 10º cap a l'oest, i dibuixaven un sistema de roses de vents i de rumbs que s'entrellaçaven dins del mapa. Retolaven tots els accidents de la costa amb molt detall i amb una gran precisió, i guarnien el continent profusament amb banderes, escuts, armes i, fins i tot, retrats.

Els mètodes d'estima permetien situar, més o menys, el vaixell en el mar. Primer calia saber el rumb, cosa bastant fàcil des de la introducció de la brúixola als vaixells, i després calia determinar la velocitat de la nau.

La brúixola o compàs, aparell introduït a la navegació durant l'edat mitjana, es ca-

1. Un exemple molt destacat és l'*Atlas Català* (aprox. 1375), encàrrec fet als cartògrafs mallorquins Abraham Cresques i el seu fill Jafudà Cresques per Pere III el Cerimoniós per regalar al rei de França. L'Escola Mallorquina de Cartografia ha proporcionat altres exemplars cartogràfics destacats, com ara la Carta Mallorquina, d'Angelí Dolcert (1339), o els exemplar de Guillem Soler (1380), Macià de Viladestes (1439), Pere Rosell (1486) o Jaume Beltran (1489) (Rey Pastor, 1960, p. 38)

racteritzava per marcar sempre el nord magnètic. Es componia essencialment d'una agulla imantada sostinguda pel seu centre. Es guardava dins d'una capsa, al fons de la qual s'hi dibuixava una rosa dels vents. La seva lectura indicava l'angle que el vaixell formava amb la línia nord-sud, és a dir el rumb.

Fins al Renaixement els càlculs sobre la velocitat del vaixell es feien a ull. La velocitat es podia aconseguir comptant el temps que una massa d'aigua passava entre dues marques, o també llançant un objecte flotant per la proa i calculant el temps que trigava en recórrer tota l'eslora del vaixell. No obstant això, a l'època clàssica Vitruvi (*fl.* 25 aC) i més tard Heró (*fl.* 100 aC) havien descrit un aparell anomenat *hodòmedre*, que facilitava l'obtenció d'aquesta mesura. Els textos de nàutica del segle XVI descriuen per primer cop un altre aparell anomenat *corredora de barqueta*.[2] Aquest senzill aparell es compon d'una peça de fusta lligada a un cordill que quan es llança a l'aigua queda flotant. La corda que la subjecta està dividida en porcions mitjançant uns nusos, i es desenrotlla des d'un cilindre que disposa d'unes nanses per permetre al mariner la subjecció. Completava l'instrument un rellotge de sorra, o ampolleta, de 30 segons. Els nusos de la corda estaven separats entre si 1/120 de milla i, com que 30 segons és també 1/120 d'hora, resultava que els nombre de nusos de la corda que passaven en el temps que es buidava una ampolleta coincidia amb el número de milles recorregudes en una *hora*.

$$\frac{milla}{hora} = \frac{120\ nusos}{120 \cdot 30\ seg.} = \frac{nusos}{30\ seg.}$$

Amb el rumb i la velocitat del vaixell es podia calcular aproximadament el lloc on aquest es trobava, anomenat *punt d'estima* o també *punt de fantasia*. La forma de càlcul era molt simple. Sobre una carta plana s'assenyalava el punt de partida, per on es traçava una línia nord-sud i es marcava un angle de vèrtex en aquest punt, de valor igual al rumb. A continuació, sobre la línia de rumb es marcava la distància recorreguda en un cert temps i, per l'extrem, es traçava una línia est-oest. El resultat era un triangle rectangle del qual se'n coneixia un angle agut i la hipotenusa. El primer era el rumb i el segon la distància recorreguda. Els catets obtinguts gràficament permetien saber la latitud i la longitud d'estima del punt d'arribada (Baralt, 1811, p. 114).

Aquests procediments aproximats, tot i donar resultats erronis, van permetre durant segles la navegació pel Mediterrani sense gaires dificultats, ja que les imprecisions degudes als instruments, les deficiències dels càlculs o l'aproximació comesa en considerar la superfície del globus plana eren suplertes per la facilitat de percebre amb poques jornades de navegació les muntanyes costaneres o altres accidents geogràfics (Vernet, 1979, p. 383).

La projecció Mercator

Com hem vist, el rumb tenia un paper destacat en el coneixement de la situació del vaixell en el mar. Però, encara que els portolans dibuixessin un entramat de rumbs com a prolongació de les direccions assenyalades per les roses dels vents, aquestes línies no es corresponien amb els rumbs reals sobre la superfície de la Terra.

2. La primera corredora la descriu Willam Bourne en *A regiment for the sea* (1577) (Randier, 1990, p. 43).

No ha de sorprendre que la cartografia tractés de cercar maneres de representar la superfície esfèrica que permetessin mantenir el rumb i, consegüentment, els angles.

El 1546, el portuguès Pedro Nunez (1502-1570) va publicar una obra en la qual provava que les línies que mantenien el rumb no coincidien amb els cercles màxims i, en conseqüència, no eren cercles, sinó que tenien la forma d'espiral. Anys més tard, aquestes corbes serien conegudes com *loxodròmies*.

Els viatges en vaixell a través de l'Atlàntic es realitzaven en condicions d'extrema duresa i comportaven perdre de vista la terra durant molts dies. La incertesa, llavors, s'incrementava i creixia el risc de perdre les mercaderies transportades i, fins i tot, les vides dels mariners. En aquestes condicions resultava imprescindible disposar d'unes cartes nàutiques prou exactes.

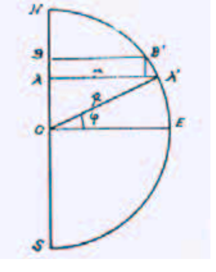
Amb el desig de donar resposta a aquestes necessitats, el 1569 el cartògraf holandès Gerard Mercator (1512-1594)[3] va elaborar un mapamundi titulat *Nova et aucta orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendate accommodata*, en el qual, de manera empírica, representava la Terra d'una forma en la qual les loxodròmies eren línies rectes.

La projecció de Mercator consistia en una xarxa de rectes verticals i una altra de rectes horitzontals. Les primeres eren equidistants entre si, representaven els meridians i estaven col·locades de manera que, en l'equador, aquesta equidistància, a l'escala corresponent, estava representada en vertadera magnitud. Les segones representaven els paral·lels; no eren equidistants sinó que a mesura que hom s'allunyava de l'equador, la seva distància augmentava, amb la qual cosa s'obtenien unes latituds ampliades.

La interpretació més encertada de la manera com Mercator va obtenir aquestes latituds ampliades la dóna Rey Pastor:

> Cálculo no aproximado sino exacto, construcción gráfica; integración exacta (todo en una pieza), lo realizó probablemente sin más que ampliar cada latitud AB de la escala natural por la A'B'>AB dada en la figura. ¿Demostración? ¡Mira! (Rey Pastor, 1960; p. 9)

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AA'}{OA'} = \frac{r}{R}$$



3. Gerard Mercator era el nom llatinitzat de Gerhard Kremer, director d'un establiment de cartografia a Lovaina. De formació universitària, Mercator, va ocupar la seva vida construint globus terraqüis i instruments de navegació, i també elaborant mapes. Un dels més destacats va ser el que va elaborar el 1554, en el qual reduïa la longitud de la Mediterrània uns 53º, corregint així a Ptolemeu. (Raisz, 1953, p. 40) .

La interpretació consisteix en ampliar la latitud en la mateixa proporció en què es troba el radi del paral·lel amb el radi de la Terra. Això equival a interpretar la projecció de Mercator com una projecció cilíndrica peculiar, en la qual la projecció no es fa sobre un únic cilindre tangent a l'equador, sinó sobre diversos cilindres de radi, els successius radis dels paral·lels corresponents.

La projecció obtinguda era especialment important, ja que tant els meridians, els paral·lels com les línies de rumbs o loxodròmies eren línies rectes i, encara que el mapa no conservés les superfícies, sí que mantenia els angles.

Mercator no va donar cap demostració teòrica del seu invent. Va caldre esperar els treballs dels matemàtics posteriors perquè se'n trobés l'explicació matemàtica. Així, Edward Wright (1558-1615) va descobrir que en la projecció de Mercator les distàncies dels paral·lels a l'equador s'obtenien pel sumatori de les latituds:

$$y = \sum_{0}^{\phi} \sec t$$

En els anys posteriors, Simon Stevin (1548-1620), James Gregory (1638-1675), Gottfried W. Leibnitz (1646-1716), Jean Bernoulli (1667-1748), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) i Carl Friedrich Gauss (1777-1855) van ocupar-se d'aquest tema i, amb la invenció del càlcul infinitesimal, van poder explicar de manera rigorosa el que Mercator havia aconseguit intuïtivament, i van poder establir la relació que permet obtenir les latituds ampliades:

$$\int_0^{\phi} \sec\phi = \ln \cot g \frac{90^{\circ}-\phi}{2} = 2{,}30259 \log \cot\, g \frac{90^{\circ}-\phi}{2}$$

La història de la projecció de Mercator permet extreure algunes lliçons d'interdisciplinarietat, ja que involucra diverses disciplines: la geografia, la navegació i les matemàtiques.

Pel que fa a les matemàtiques, es parteix d'un problema irresoluble, el qual consisteix en representar de manera exacta una superfície esfèrica sobre un pla, i en el qual l'única cosa que es pot aconseguir es imposar a la projecció una determinada condició: per exemple, conservar els angles. Això, tal com hem vist, es va poder aconseguir amb la projecció de Mercator, en la qual totes les corbes de la carta es tallen entre elles sota els mateixos angles que les corbes de la superfície esfèrica a les quals representen.

El problema de les cartes i, en particular, la projecció de Mercator, va donar lloc a un problema matemàtic més general, consistent a representar una superfície corba sobre una altra superfície, i va donar lloc a un capítol de l'anàlisi referent a la projecció conforme en la qual es conserven els angles (Delevsky, 1942; p. 116).

La posició pels mètodes d'Astronomia Nàutica: La latitud.

De les dues coordenades, latitud i longitud, la primera era fàcilment calculable per procediments astronòmics. Ja des de l'antiguitat els navegants havien après a *posar l'ull al* *cel* per a determinar-la, i sabien que el valor de la latitud coincidia amb l'altura del pol sobre l'horitzó. Ara bé, el pol Nord no estava assenyalat en el cel i, per això, va caldre recórrer a les estrelles que hi havia a prop: la polar en l'hemisferi septentrional i la creu del sud en el meridional. També van aprendre que durant el dia la latitud es podia trobar amb l'altura meridiana del Sol, sempre que es conegués la declinació d'aquest astre. Un coneixement més rigorós de la latitud permetia corregir els càlculs d'estima i trobar una longitud més ajustada a la realitat.[4]

A finals del segle XVI les mesures astronòmiques de la latitud van començar a ser corregides de tres defectes: la refracció, la paral·laxi i el semidiàmetre,[5] i, aleshores, la trigonometria esfèrica va desembarcar en el càlcul de la latitud mitjançant l'ús del triangle esfèric. En aquells anys, els matemàtics posaven molt d'èmfasi en un conjunt de fórmules trigonomètriques que facilitaven els càlculs per mitjà de la transformació de les sumes en productes, i que eren conegudes com les regles de prostaferesis. Tanmateix, en el tombant d'aquest segle, John Napier (1550-1617) va inventar una nova eina que, com la regla anterior, va alleugerir considerablement les operacions: els logaritmes neperians. Més tard, el 1624, Henry Briggs (1561-1630) va construir la primera taula dels logaritmes decimals (Boyer, 1986, p. 392). L'ús dels logaritmes va facilitar les resolucions dels triangles esfèrics i va afavorir que els pilots realitzessin amb més facilitat els càlculs astronòmics de la latitud.

L'aplicació dels logaritmes a la nàutica la va facilitar Edmund Gunter (1581-1626), professor d'astronomia al Gresham College de Londres, en idear, el 1625, el conegut regle que porta el seu nom, en el qual va incloure escales logarítmiques de nombres, d'angles, de sinus i de tangents. L'escala Gunter tenia un mig metre de longitud: a una de les cares hi presentava les escales de tipus logarítmic, mentre que a l'altra hi col·locava les escales naturals. Més tard va construir un sector amb la mateixa finalitat (García Franco, 1947, p. 121). Aquests instruments van anar preparant el camí al regle de càlcul, que tant de servei va fer no sols a la marina, sinó també a l'enginyeria, fins a l'aparició de les calculadores.

Amb aquests avenços matemàtics l'astronomia nàutica va perfeccionar els mètodes de la latitud, ja fos amb la introducció de nous procediments o millorant els ja existents, [6] de manera que, a poc a poc, l'art de navegar va esdevenir ciència. Va contribuir a això la difusió de les cartes construïdes amb la projecció de Mercator i, també, l'aparició de nous instruments de reflexió, com l'octant, en el segle XVIII. Matemàtics d'alt prestigi van estudiar el

4. Les mesures de la latitud, encara que escasses, eren habituals en els viatges durant l'edat mitjana i fins al segle XV (Laguarda, 1959, p. 3) (Vernet, 1979, p. 350*).

5. La refracció té en compte el desviament de la llum en travessar les capes de l'atmosfera. La paral·laxi corregeix la diferent percepció que hom té d'un astre si s'està a la superfície de la Terra o si s'està al seu centre. El semidiàmetre, que no pot ser considerat pròpiament com un error, fa referència al fet que les mesures d'un astre que hom fa amb els instruments se solen fer fins al seu limbe i, aleshores, a aquests valors cal afegir-hi el semidiàmetre (Ciscar, 1869, p. 120).

6. En el segle XVII es podia calcular la latitud per diversos mètodes: 1) Per l'altura meridiana d'una estrella. 2) Per l'amplitud ortiva de les estrelles. 3) Per dues altures extrameridianes del Sol. 4) Per dues altures del Sol i el temps transcorregut entre elles. 5) Per dues altures del Sol o d'una altra estrella i la distància entre els verticals corresponents. 6) Per l'altura simultània de dues estrelles. 7) Per dues estrelles que tinguin l'ort i l'ocàs al mateix temps (García Franco, 1947, p. 141-200).

problema i van aportar-hi nous mètodes; per exemple, Gauss va idear un mètode per trobar la latitud (García Franco, 1947, p. 150).

La longitud: una coordenada molt problemàtica.

La segona de les coordenades va trigar força temps a poder ser calculada amb prou fiabilitat. No és que el problema fos difícil de comprendre, sinó més aviat que les tècniques de mesura no eren les apropiades.

Conèixer la longitud, també anomenada *altura est-oest*, era un problema senzill. Només calia saber en un mateix instant l'hora del vaixell i l'hora del meridià de referència. Restant aquestes dues hores s'obtenia l'angle horari que, convertit en graus (1hora = 15º), donava la longitud.

Però aquest problema, aparentment tan fàcil, va costar molt de ser resolt, i va ocupar el temps de les ments més privilegiades. En primer lloc, mentre que la latitud tenia l'equador com a línia natural d'origen, la longitud requeria que s'establís un primer meridià de manera artificial. A l'època clàssica se solia agafar el meridià de les Illes Canàries com a referència, i així es va mantenir fins al segle XVII, en què cada país va escollir un meridià que passés pel seu propi territori: París, Lisboa, Cadis, etc. Va caldre esperar a finals del segle XIX perquè el meridià de Greenwich fos triat com a meridià zero.

La primera idea que, ben segur, van tenir els navegants, va ser la de disposar de rellotges que marquessin el temps. Però aquests aparells, basats en l'aigua i en la sorra, eren tan imprecisos i es veien tan afectats pels moviments dels vaixells, que resultaven inservibles. Per això es van buscar alguns fenòmens astronòmics que poguessin ser observats des de diversos llocs de la Terra al mateix temps, com els eclipsis de Lluna.[7] El problema és que aquests fets només succeïen de tant en tant i, a més, no eren visibles des de tots els punts de la Terra.

Les monarquies europees van establir premis per tal d'incentivar els inventors a trobar una solució al problema de la longitud. Així, Felip III d'Espanya va oferir una pensió de 6.000 ducats, i els governs de Portugal, Venècia i Holanda van establir també els seus premis. Llavors, una enorme munió de treballs inundà les cancelleries d'aquests països. Es presentaren mètodes que empraven la Lluna en conjunció o en oposició a altres estrelles, com Venus o una estrella fixa, i mètodes que calculaven la distància de la Lluna a altres estrelles. Galileu Galilei (1564-1642) va presentar-ne un que consistia en observar la conjunció d'algun dels satèl·lits de Júpiter amb aquest planeta. La idea era la mateixa: una llumeneta al cel que apareixia i s'extingia en el mateix instant per a tots els observadors de la Terra. Aquest fenomen, tabulat pel primer meridià, el de referència, permetria obtenir-ne l'hora i, consegüentment, la longitud. Però el mètode no va resultat pràctic al mar a causa de la falta d'estabilitat dels vaixells.[8]

7. Els àrabs havien realitzat observacions precises dels inicis i finals dels eclipsis de Lluna, i acompanyaven aquesta dada amb l'altura de l'astre, cosa que va facilitar el càlcul de l'angle horari. Més tard, Cristòfol Colom va utilitzar aquest procediment en dues ocasions per determinar la longitud, i va fer servir les *Efemérides* per trobar l'hora que succeïa aquest fenomen en un lloc d'Europa (García Franco, 1947, p. 284).

8. Galileu, que presentà el seu mètode el 1616, no va rebre cap resposta del rei d'Espanya i va tornar a pre-

Un altre conjunt de mètodes eren els que es basaven en la creença errònia que la declinació magnètica o la inclinació de l'agulla prenia un valor diferent en cada punt del Globus i que guardava una certa relació amb la longitud.[9]

A mitjans del segle XVIII, un d'aquests mètodes es va anar imposant amb força als altres: era el mètode de les distàncies lunars. El 1759, l'Acadèmia de Ciències de París va manifestar-s'hi a favor i, poc després, en el *Nautical Almanac* i en les *Connaissance des Temps* van començar a publicar-s'hi taules que donaven les distàncies de la Lluna al Sol per cada hora del meridià de referència.

El mètode de les distàncies lunars requeria que es realitzessin unes observacions de les altures de la Lluna i del Sol i de les distàncies entre els seus limbes més propers. Aquestes dades eren corregides dels defectes habituals: depressió, refracció, paral·laxi i semidiàmetre. La distància entre els dos astres, anomenada *aparent*, s'havia de reduir a vertadera mitjançant la resolució dels triangles esfèrics ZLS i Zls, on Z és el zenit, i L, l, S i s les posicions vertaderes i aparents de la Lluna i del Sol. Amb la distància vertadera es buscava a les taules nàutiques l'hora del meridià de referència, i la resta amb l'hora del meridià del lloc donava la longitud.

La preocupació dels matemàtics i astrònoms va ser intentar oferir maneres de facilitar aquests càlculs. Així, mentre que uns van recórrer a les taules logarítmiques i trigonomètriques, altres preferiren proporcionar taules que facilitessin les correccions de les observacions dels defectes habituals. La conversió de la distància de la Lluna al Sol d'aparent a vertadera va permetre suggerir nous procediments i proposar noves fórmules per a facilitar les operacions. Nicolas-Louis de Lacaille (1713-1762), J. J. François de Lalande (1732-1807), Nevil Maskelyne (1732-1811), Jean Charles de Borda (1733-1799), Leonhard Euler (1707-1783), Joseph de Mendoza Rios (1762-1816) i Adrien Marie Legendre (1752-1833) figuren entre els científics més destacats (García Franco, 1947, p. 308-332).

Destacarem al reverend Maskelyne, astrònom reial, per fer ús d'un tipus de logaritmes avui poc habituals, anomenats *logístics* o *proporcionals*, caracteritzats per aplicar-se a nombres fraccionaris en els quals el numerador era sempre constant i el denominador variable.

$$\log \log ist \quad x = \log \frac{3600}{x}$$

Més tard François Richer[10] va aplicar una proposició demostrada per Legendre per a la resolució del triangle esfèric:

sentar-lo a Holanda el 1636. Allí li van atorgar una cadena daurada, però va morir abans que li fos lliurada (Brown, 1977, p. 209).

9. Aquest procediment va donar lloc a tota una cartografia basada en la declinació de l'agulla i a un seguit de treballs en aquesta direcció, tant de científics com d'aficionats. Un exemple de la preocupació sobre les aplicacions de la declinació magnètica la tenim a *L'Obra de Josep Rubió i Nadal, Científic Il·lustrat, Rector de Vilanova de Prades (1792-1807)*. Vilanova de Prades: Ajuntament— Parròquia, 1999.

10. No estem segurs, però pensem que podria tractar-se de François Richer (1718-1790) jurisconsult francès nascut a Avranches i mort a París, i autor d'algunes obres de dret, tot i no haver pogut consultar els seus

Sean a, b, c los tres lados de un triangulo esférico y A el ángulo opuesto al lado a; entonces, si se forma un triangulo rectílineo de lados

$$2\sin\frac{a}{2};\ \sin\frac{b+c}{2}+\sin\frac{c-b}{2};\ \sin\frac{b+c}{2}-\sin\frac{c-b}{2},$$

el ángulo opuesto al primero de estos lados es también A. (García Franco, 1947, p. 316)

Joseph de Mendoza Rios va tractar de simplificar les fórmules per calcular la distància vertadera de la Lluna i el Sol amb la introducció del sinus vers o dels suplementaris sinus vers.

$$\sin \mathit{vers}\ \ \alpha = 1-\cos\alpha$$
$$\mathit{su}\sin \mathit{vers}\ \ \alpha = 1+\cos\alpha$$

Els seus treballs d'utilització d'aquestes raons trigonomètriques van propiciar que avui les fórmules per obtenir el sinus i cosinus de l'angle meitat siguin conegudes com a fórmules de Mendoza (Mendoza, 1795, p. 7).

Aquests tres exemples han de servir per provar com els conceptes matemàtics van anar trobant aplicació en la resolució, primer, i en la simplificació del mètode de determinació de la longitud per a les distàncies lunars.

Les longituds a l'Escola de Nàutica de Barcelona

La tria entre els diversos procediments de determinació de la longitud per a les distàncies lunars va dependre de diversos factors i, en alguns casos, van jugar un factor decisiu els professors que s'ocuparen de formar els pilots a les escoles de nàutica. Per il·lustrar el que estem dient valgui l'exemple de l'Escola de Nàutica de Barcelona, un centre docent creat i finançat per la Junta de Comerç des del 1769 (Moreno, 1993, p. 25-27). En aquesta Escola, com a les altres escoles del Principat, el mètode de les distàncies lunars va ser introduït arran de la visita de l'inspector Francisco Javier de Winthuysen, el 1791.[11] Valgui dir, en favor del professorat de les escoles, que les primeres taules nàutiques publicades per l'Estat espanyol van aparèixer en el *Estado General de la Marina* cinc anys abans, i que no fou fins aquell mateix any de la visita d'inspecció que l'*Almanaque Náutico* les va publicar de manera regular,

treballs sobre les longituds apareguts a les *Connaissances des Temps*, de 1796. Sembla evident que no fou Jean Richer (1630-1696), astrònom i matemàtic francès, pel fet que no va poder copiar Legendre, ja que no fou coetani seu.

11. Tanmateix, l'objectiu d'aquesta visita no era tant la millora dels ensenyaments com aconseguir la submissió de l'Escola al Departament Militar de Cartagena. Això no es va aconseguir, però, a canvi que els estudiants no haguessin de servir la Reial Armada, la Junta de Comerç va haver de promulgar unes ordenances que apropaven els ensenyaments de l'Escola als proposats des del Ministeri de Marina. (Barca, 1996, p. 269)

per la qual cosa sembla comprensible l'escepticisme i la reticència del professorat a explicar aquest mètode.

A partir d'aquest moment, i fins a principis del segle XX, a l'Escola de Nàutica de Barcelona es va explicar aquest mètode i es va triar el procediment conegut com *trigonomètric*, que consistia en la resolució dels triangles esfèrics implicats; així, es van descartar o deixar en segon terme els altres procediments, com el de Borda o el de Mendoza, encara que fossin més senzills i no requerissin coneixements matemàtics previs, sinó únicament el maneig de taules. La raó, al nostre entendre, cal buscar-la en què la formació dels professors de l'Escola al llarg de la primera meitat del segle XIX tenia una gran base matemàtica. Així, en fou professor Agustí Canellas, primer, i Onofre Novellas, després. Tots dos foren acadèmics de la Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona. Agustí Canellas tenia amplis coneixements matemàtics i astronòmics, que quedaren reflectits en els dos volums dels *Elementos de Astronomía Náutica*, en què dedicà un ampli capítol al mètode de les longituds i on va deixar clara la seva preferència pel mètode trigonomètric.[12] Onofre Novellas va compaginar els ensenyaments a l'Escola de Nàutica amb els de la càtedra de matemàtiques de la Junta de Comerç. El 1819 va presentar una memòria a l'Acadèmia amb el títol de *Sobre la necesidad de la óptica y de la cosmografía para el acierto en la dirección de las naves*, en la qual suggeria un procediment per calcular les distàncies lunars quan només hi havia un únic observador, també basat en el procediment trigonomètric (Barca, 1996, p. 275).

El 1904, quan el mètode de les distàncies lunars ja havia començat a caure en desús i era substituït per les mesures horàries fetes amb cronòmetres, Josep Ricart i Giralt, professor de l'Escola de Nàutica i testimoni d'excepció d'aquests canvis, recordava aquesta preferència de la Marina catalana en fer servir el mètode de les distàncies lunars pel procediment trigonomètric, i ho justificava pel fet de no requerir més taules que les de logaritmes, les de sinus i les de tangents (Ricart i Giralt, 1904, p. 6).

Conclusió

El problema del punt no es va solucionar fins al segle XVIII, en aparèixer els cronòmetres de John Harrison (1693-1776) i de Ferdinand Berthoud (1727-1807). Ara bé, si la solució del càlcul de la longitud és vuitcentista, la difusió dels cronòmetres i l'equipament dels vaixells amb aquests instruments no va arribar fins a finals del segle següent.

Tanmateix, la solució del problema no va estar exempta de coneixements matemàtics ja que, per poder arribar a la fabricació dels cronòmetres, van caldre estudis sobre el pèndol, en els quals va intervenir Galileu, i sobre la cicloide i la seva aplicació als rellotges, que va fer Huygens.[13]

12. «Este método trigonométrico es el más directo, el más exacto y el que recomienda Delambre con preferencia a todos los demás; ya porque sobre presentarse al alcance de todos los que están versados en la trigonometría esférica, pocas son las fórmulas que le aventajan en la brevedad, y ninguna en la exactitud cuando las observaciones sean buenas, y todas las demás circunstancias ventajosas»(Canellas, 1817, p. 129).

13. Christian Huygens (1629—1695) va construir el 1669 un rellotge de pèndol equipat amb suspensió cardan i perfeccionat amb dos arcs de cicloide (Brown, 1977, p. 213).

Com hem vist, les matemàtiques i la nàutica han mantingut una estreta relació, sobretot a partir del segle XV, amb la navegació d'altura. Aquest lligam era tan gran com la relació que hi hagué entre la matemàtica pura i la matemàtica aplicada. De fet, aquesta distinció no deixa de ser un anacronisme ja que, fins als inicis del segle XIX, la matemàtica era considerada com una ciència auxiliar, com la donzella de les ciències naturals (Rey Pastor-Babini, 1985, p. 97).

Des de la nostra òptica actual, hi veiem un continu traspàs d'informació i de coneixement entre les matemàtiques i les altres ciències. Els exemples exposats en aquesta comunicació així ho evidencien: el problema del punt s'aprofita dels avenços matemàtics, i la matemàtica avança gràcies a les necessitats de la cartografia i de la nàutica. Però si ens poséssim en el lloc dels matemàtics dels segles anteriors al XVIII, aquest traspàs no seria entès com a tal, sinó com una part més dels seus treballs dins de les diferents branques de la matemàtica, ja que era més habitual que s'ocupessin dels problemes de la nàutica, de l'astronomia o de la mecànica, que no pas dels fonaments de la matemàtica.

Tornant a la idea inicial d'aprofitar aquesta visió històrica per a la docència, només voldria suggerir dues actuacions que podrien ser de força utilitat: la primera, una mica més treballada, consisteix en aprofitar la cartografia per fer treballs sobre mapes: escales, càlculs d'àrees, corbes de nivell;[14] la segona, a nivell de suggeriment, consistiria en utilitzar la nàutica,i en concret, el problema del punt, per mostrar la utilitat de la trigonometria plana i esfèrica o dels logaritmes. La resolució d'un problema d'estima o un càlcul de la latitud o la longitud podrien mostrar a l'alumne que aquests conceptes matemàtics que estudia, a més de tenir una història, han servit per fer progressar la humanitat.

Bibliografia

BARALT, J. (1811), *De la Hidrografia. Construcción i uso de las cartas marinas*, Girona, Imprenta Bro.

BARCA SALOM, F. X. (1996), «La longitud, una coordenada conflictiva». A: *I Simposium de Historia de las Técnicas. La construcción Naval y la Navegación,* Santander, Centro de Estudios Astillero de Guarnizo, Universidad de Cantabria, p. 265-277.

BOYER, C. B. (1986), *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial AUT/94.

BROWN, L. A. (1977), *The Story of Maps*, Nova York, Dover Publications Inc.

CANELLAS, A. (1817), *Elementos de Astronomía Náutica*, Barcelona, Imp. Agustín Roca, vol. II.

CISCAR, G. (1869), *Curso de Estudios Elementales de Marina*, Madrid, Depósito Hidrografico, vol. III, 9a. ed.

DELEVSKY, J. (1942), «L'invention de la projection de Mercator et les enseignements de son histoire», *Isis*, *34*, 1942-1943, p. 110-117.

GARCÍA FRANCO, S. (1947), *Historia del arte y ciencia de navegar*, Madrid, Instituto Histórico de Marina, vol. I i II.

14. Un exemple molt interessant és el treball de CORBERÓ, M. V. et. al. (1988), *Trabajar mapas*, Madrid: Biblioteca de Recursos Didácticos Alhambra.

LAGUARDA TRIAS, R. (1959), *Comentarios sobre los origenes de la navegación astronòmica*, Madrid, Revista General de Marina.

MARGUET, F. (1931), *Histoire Génerale de la Navigation du XVè au XXè siècle*, París, Société d'Editions Géographiques, Maritimes et Coloniales.

MENDOZA RIOS, Joseph de, (1795), *Memoria sobre algunos métodos nuevos de calcular la longitud por las distancias lunares y aplicación téorica a la solución de otros problemas de navegación*, Madrid, Imprenta Real.

MORENO RICO, J. (1993), «La Enseñanza Náutica en Barcelona entre 1769 y 1939», *Revista de Historia Naval*, *41*, any XI, p. 25-45.

RAISZ, E. (1953), *Cartografía General*, Barcelona, Editorial Omega.

RANDIER, J. (1990), *L'instrument de marine*, París, CELIV.

REY PASTOR, J.; BABINI, J. (1985), *Historia de la Matemática*, Barcelona, Gedisa, vol. I i II.

REY PASTOR, J., GARCÍA CAMARERO, E. (1960), *La Cartografía Mallorquina*, Madrid: CSIC, Departamento de Historia y Filosofía de la Ciencia Instituto Luis Vives.

RICART I GIRALT, J. (1904), «Cálculo de la longitud geográfica por medio de las distancias lunares; su pasado, su presente y su porvenir», *Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes*, nov. 1904.

VERNET, J. (1979), «La Navegación en la Alta Edad Media», *Estudios sobre historia de la Ciencia Medieval.* Reedición de trabajos dispersos, ofrecida al autor por sus discípulos con ocasión de los venticinco años de su acceso a la cátedra de la Universidad de Barcelona. Barcelona, Bellaterra, UB, UAB, p. 324-380.